**Sistemas Lineares**

**Métodos para resolver sistemas lineares**

* Eliminação gaussiana e Decomposição LU são os métodos mais eficientes (possuem o menor número de operações aritméticas.

**Métodos direto:**

* Sempre encontra uma solução (se houver).
* O resíduo deve ser zero ou muito próximo de zero (por conta de erros de arredondamento).
* Normalmente o resíduo não é calculado pois sabe-se que a técnica de Gauss vai encontrar a solução e, além disso, tem-se um custo para armazenar a matriz original.
* **Eliminação gaussiana sem pivotamento:**
  + Pode ter problema com divisão por zero na diagonal principal.
  + Usa-se o resíduo para a verificação.
* **Eliminação gaussiana com pivotamento parcial (pivotamento de linhas):**
  + Não tem problema com divisão por zero.
  + Usa-se o módulo para suavizar os erros de arrendamento nas operações aritméticas envolvendo as linhas.
  + Usa-se o resíduo para a verificação.
* **Decomposição LU:**
  + Aproximadamente mesma complexidade que o método de eliminação gaussiana.
  + Decompõe a matriz como o produto de duas outras matrizes (matriz L e matriz U). L é matriz triangular inferior e U é superior.
  + Diferentemente dos métodos de eliminação gaussiana, o vetor b não é manipulado, ele é apenas utilizado para resolver o sistema.
  + Melhor usar, em comparação com a eliminação gaussina, se tiveres sempre o mesmo sistema linear A mas diferentes vetores b, visto que na Decomposição LU b não é alterado, então podemos calcular apenas uma vez a matriz A e mudar apenas o vetor b.
  + Usa-se o resíduo para a verificação.

**Métodos iterativos:**

* Todo método iterativo possui requisitos para poder garantidamente convergir. Caso os requisitos não sejam cumpridos, o método pode não convergir.
* Todo método iterativo possui valores iniciais.
* Refinam a solução (não calculam uma única vez).
* Em geral mais eficiente desde que a convergência seja possível.
* Podem ser inviáveis quando o sistema é muito grande ou mal-condicionado.
* Usar quando:
  + Número de equações é alto.
  + Possui matriz esparsa.
  + Quando o determinante está próximo de 0.
* Condição de parada: (x^k – x^(k-1)) < que uma dada tolerância. Ou seja, a solução anterior menos a solução atual deve ser menor que uma dada tolerância.
  + Pode-se somar os erros da diferença para comparar com a tolerância ou
  + Pode-se pegar o maior da diferença para comparar com a tolerância ou
  + Pode-se calcular o resíduo (mais custoso, menos recomendado).
    - Se o sistema convergir, ele vai convergir independentemente da condição de parada. O que pode mudar de uma condição de parada para outra é o número de iterações (pode aumentar uma ou duas iterações no máximo). A precisão também será a mesma.
* Condição de convergência:
  + A matriz A precisa ser diagonal dominante. Para ser diagonal dominante ela precisa:
    - Para todas as linhas, o elemento da diagonal principal da linha i deve ser maior ou igual a soma (em módulo) dos elementos da linha i menos o elemento da diagonal principal.
    - Para pelo menos uma linha, o elemento da diagonal principal deve ser maior do que a soma (em módulo) dos elementos da linha i menos o elemento da diagonal principal.
  + A matriz A precisa ser irredutível. Isto é, não é possível encontrar o valor de um x sem responder o sistema por completo.
* Os valores do vetor inicial não altera o processo de convergência. Já como quase nunca sabemos a solução final, iniciamos o vetor com zeros.
* **Método de Gauss-Jacobi:**
  + Mais lento (mais iterações) pois utiliza valores menos atualizados de x.
* **Método de Gauss-Seidel:**
  + Mais rápido (menos iterações) pois utiliza valores mais atualizados de x.

**Sistemas mal condicionados:**

* Se o determinante de A for muito pequeno, teremos problemas na resolução do sistema. Isso ocorre pois qualquer perturbação nos coeficientes do sistema irá alterar a solução final. Não há necessidade de calcular também outros fatores que identificam sistemas mal condicionados. Estes são os fatores de sistemas mal condicionados:
  + Determinante < 0,01.
  + Determinante normalizado < 0.01.
  + Número de condicionamento > 100.

**Método das relaxações:**

* Para descobrir seu w, precisas testar diferentes w’s.
* Caso o processo oscile ou diverge, aplique fator de desaceleração, subrelaxação, 0 < w < 1. Nem sempre ajuda.
* Caso o processo converge lentamente, aplique fator de aceleração, sobrerelaxação, 1 < w < 2. Nem sempre ajuda.

Nos sistemas lineares do tipo banda armazena-se só os elementos da diagonal em vetores.

**Sistemas Não Lineares**

Transforma-se o sistema não linear em um sistema linear para poder resolve-lo.

**Métodos iterativos:**

* **Método de Newton (de forma analítica):**
  + Para ter convergência garantida precisa ter uma estimativa inicial relativamente boa.
  + Utiliza uma matriz de derivadas parciais (matriz Jacobiana, matriz J).
  + J(X^k) . D = - F(X^k)
    - Matriz de derivadas parciais (J) vezes delta (D) menos a f nos pontos (F).
      * Condições de parada: Ou o delta (d) ou a variável F devem tender a 0.
  + Usa-se um método direto dentro do algoritmo para resolver os sistemas lineares que surgem ao decorrer do código. Usa-se um método direto (preferencialmente Gauss) ao invés de um método interativo pois o método interativo não possui convergência garantida.
* **Método de Newton (com aproximação numérica):**
  + Usa-se limites e cria/define variável h para próxima de 0.
  + Substitui-se as derivadas parciais pela aproximação numérica.